第八章　重积分

8.4　重积分的应用

8.4.5　三重积分习题课

基本方法：化三重积分为三次积分计算。

关键步骤:(1)坐标系的选取

(2)积分顺序的选定（直角）

(3)定出积分限

要结合被积函数、积分区域两方面的因素综合考虑才能找到好的方案。

对积分区域要有一定的空间想象力，最好能画出Ω的图形。如Ω的图不好画，也要画出Ω在某坐标面上的投影区域的图形。

1、利用直角坐标系计算三重积分。

适用性较广，要有一定的空间想象力。

(1)“投影法”又叫“先单后重法”

设Ω往xoy平面上的投影区域为D_{xy}，过D_{xy}内任一点而穿过Ω内部的平行于轴的直线与Ω的边界曲面至多两个交点，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

对z积分后的结果$F(x,y)$作为被积函数在D_{xy}上作对x、y的二重积分。

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

这时再依被积函数和积分区域的特点选定积分顺序。

Ω往另两个坐标面上投影的情况与此类似。

“先单”的“单”选哪一个变量?

依被积函数$f(x,y,z)$及积分区域Ω共同确定。

(2)“截面法”又称“先重后单法”、“切片法”。

设Ω夹在平面$z=c_1$和$z=c_2$之间，竖坐标为z的平面$(c_1 \le z \le c_2)$截Ω所得截面记为D_z，则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

通常选用此法时应满足：

①D_z较简单：圆、椭圆、矩形、三角形等，容易算得其面积；

② $\iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$易于计算

特别当$f(x,y,z)=\varphi(z)$时更好。

2、柱面坐标系下计算三重积分

当被积函数形如 $f(x^2+y^2), g(\frac{y}{x})$等,而积分区域为旋转体或其边界曲面含圆柱面、球面、圆锥面或在xoy面上的投影区域为圆域时,可选用柱面坐标计算三重积分。

计算可分“两步走”，化为三次积分则应一次完成。

3、球面坐标系下计算三重积分。

当被积函数形如 $f(x^2+y^2+z^2)$时,Ω 由圆锥面等所围时,选用球面坐标计算三重积分较好。

有的三重积分可能有多种选择：不同的坐标系、不同的顺序积等。总结经验，选取简单的方法。

4、三重积分中的对称性的应用。

(1)设Ω关于平面xoy对称。

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$$

$$=\begin{cases} 0, & 若 f(x,y,-z)=-f(x,y,z) \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dV, & 若 f(x,y,-z)=f(x,y,z) \end{cases}$$

Ω_1是Ω的$z\geq 0$的部分

若积分区域Ω关于平面对称，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega_1}\Big(f(x,y,z)+f(对称点)\Big)dv$$

Ω_1是Ω的靠近第一卦象的部分

(2)设Ω关于原点O对称， Ω_1是Ω的$z \geq 0$ (或$x \geq 0$，或$y \geq 0$) 的部分，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint_{\Omega_1} \left(f(x,y,z) + f(-x,-y,-z) \right) dv$$

$$= \begin{cases} 0 & 若 f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dV & 若 f(-x,-y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

(3)若Ω关于变量x,y,z具有轮换对称性，

即若$(a,b,c)\in\Omega$,则$(b,c,a)\in\Omega$,$(c,a,b)\in\Omega$则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega} f(y,z,x)dv=\iiint_{\Omega} f(z,x,y)dv$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}[f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]dv$$

例如设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$,则

$$\iiint_{\Omega} x^2 dv=\iiint_{\Omega} y^2 dv=\iiint_{\Omega} z^2 dv$$

$$=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv$$

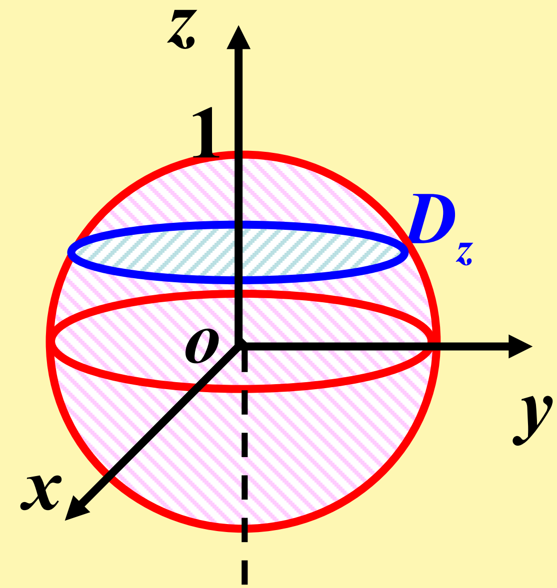
$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{R}r^2r^2\sin\varphi dr=\frac{4}{15}\pi R^5。$$

例1 算 $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv$

$\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$。

解 $\because$ 被积函数仅为 z 的函数，

故采用 " 先重后单 " 法。

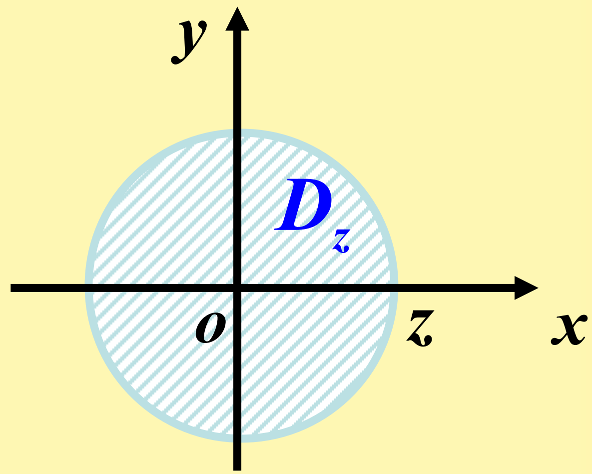


$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}dv = 2\iiint\limits_{\Omega_{上}} e^{z}dv$$

$$= 2\int_0^1 [\iint\limits_{D(z)} dxdy]e^z dz$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1-z^2)e^z dz$$

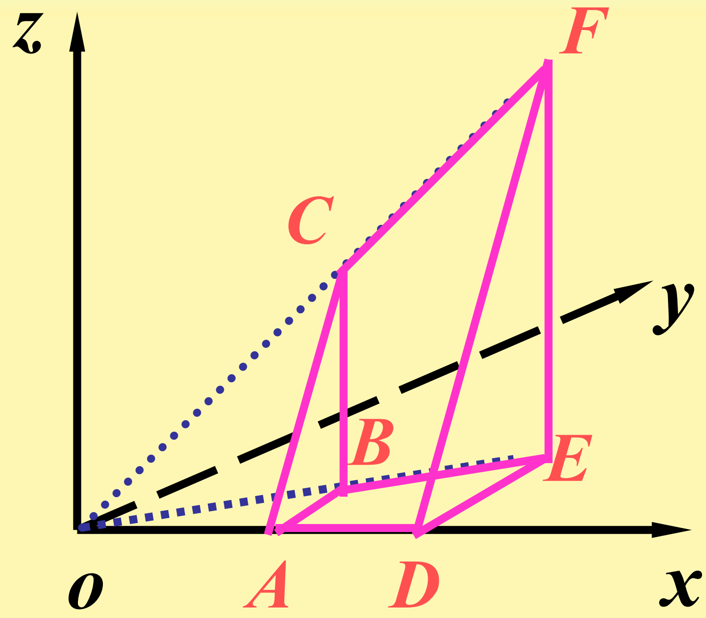
$$= 2\pi。$$



$D_z: x^2+y^2\le 1-z^2$

例2 计算 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{x^2+y^2}dv$

Ω 是由六个顶点：$A(1,0,0)$, $B(1,1,0), C(1,1,2), D(2,0,0)$, $E(2,2,0), F(2,2,4)$ 组成的三棱锥台。



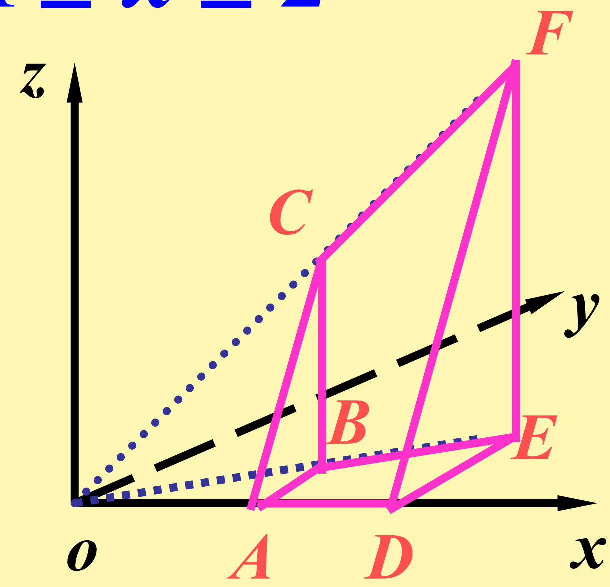
解 Ω 是以梯形 $ABED$ 为底，以梯形 $ACFD$ 为顶的柱体。$\because$ 梯形 $ACFD$ 所在平面过 x 轴，

设其方程为 $By+Cz=0$

又因过 $C(1,1,2)$ 点，得其方程为 $z-2y=0$。

$$\Omega: 0\le z\le 2y; 0\le y\le x; 1\le x\le 2$$

$$\Omega: 0 \le z \le 2y;\ 0 \le y \le x;\ 1 \le x \le 2$$



$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{x^2+y^2}\,dv$$

$$= \int_1^2 dx \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy \int_0^{2y} dz$$

$$= \int_1^2 dx \int_0^x \frac{2y}{x^2+y^2}\,dy$$

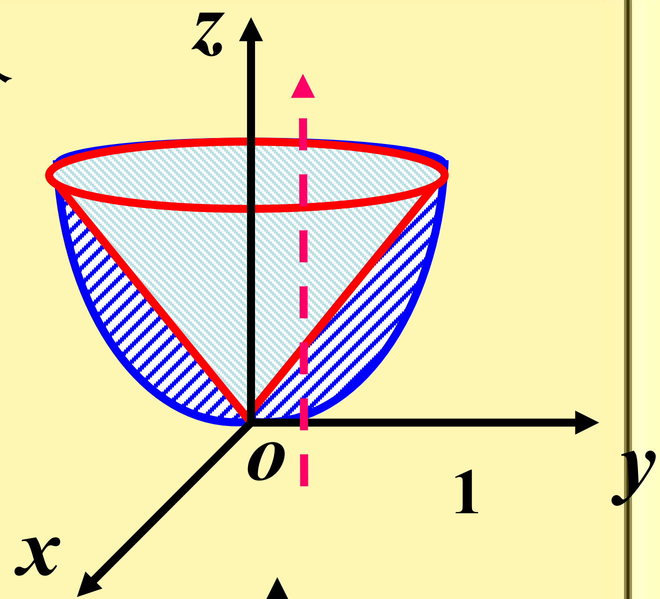
$$= \int_1^2 [\ln(2x^2) - \ln x^2]\,dx$$

$$= \ln 2$$

例3 把$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$化成三次积分

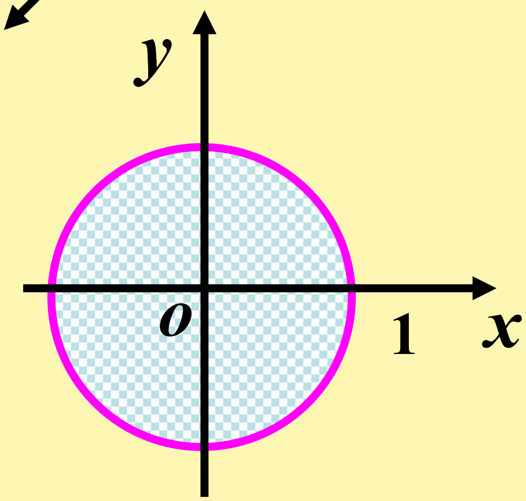
其中 Ω是由$z = x^2 + y^2$,

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$所围成的闭区域。



(*a*)在直角坐标系下

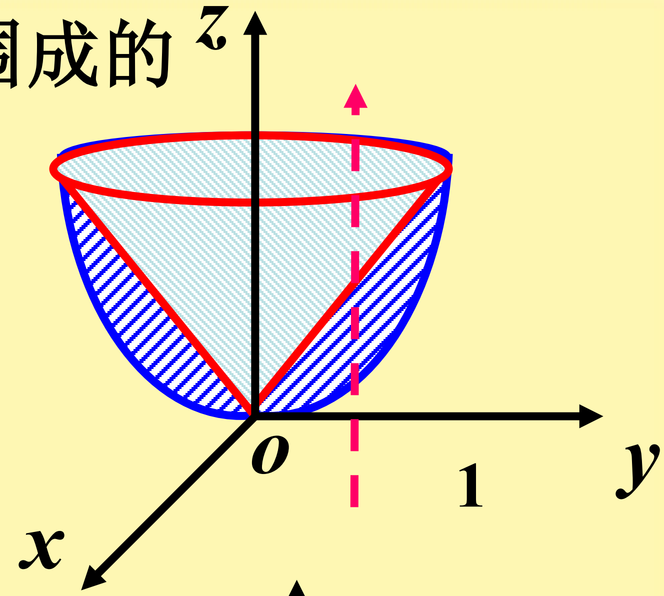
$$\Omega: \begin{cases} x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$



$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)dz$$

$D_{xy}: x^2 + y^2 \le 1$

Ω是由$z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$所围成的闭区域。

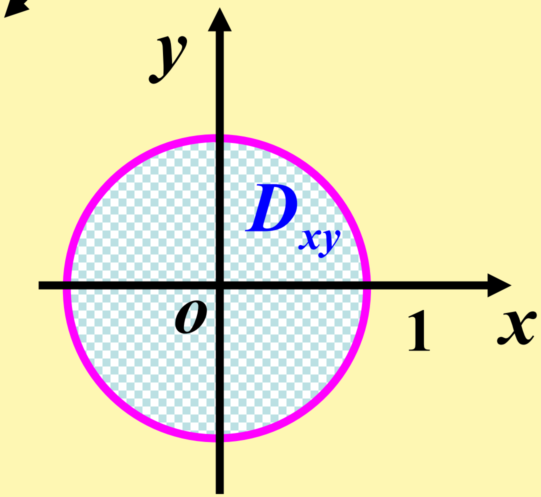


$$\Omega : \begin{cases} x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \\ -\sqrt{1 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2} \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

(*b*)在柱面坐标系下

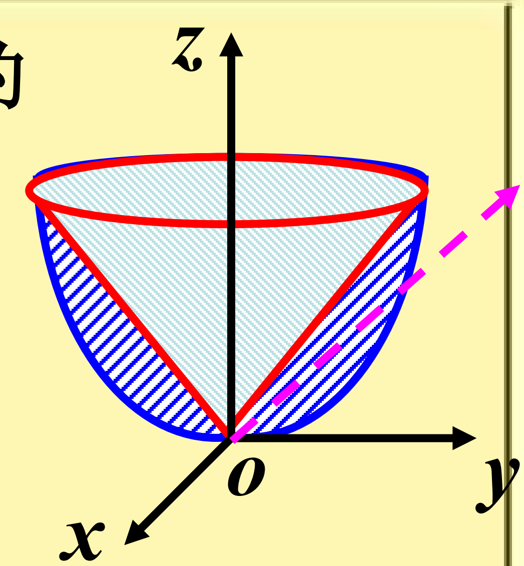
$$r^2 = x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$D_{xy} : 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$$



$$I = \int_o^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^{r} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) dz$$

Ω是由$z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的闭区域。



(c)在球面坐标系下

$$\because z=x^2+y^2 \Rightarrow r=\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$\Omega: 0\le r\le \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi},\quad \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta\le 2\pi$$

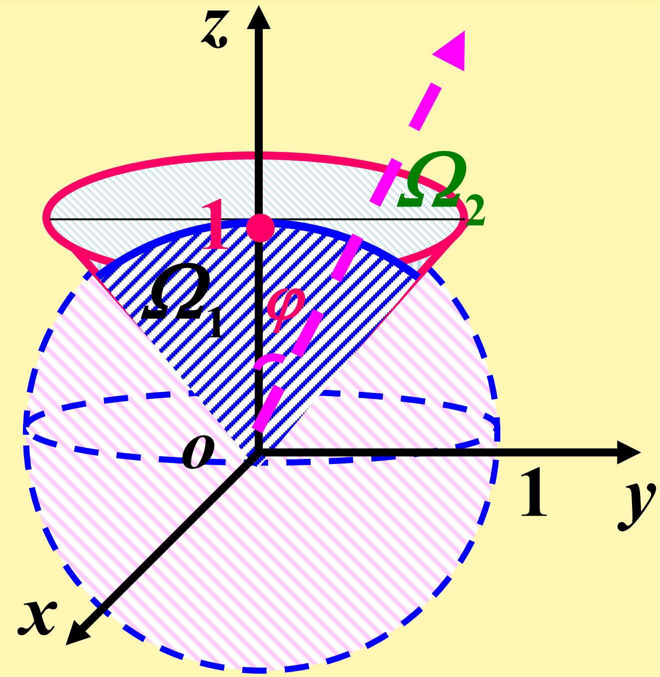
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

其中$F(r,\varphi,\theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

例4 算 $\iiint_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|dv$

其中Ω是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$

与$z=1$所围成的立体。



解 $\iiint_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|dv$

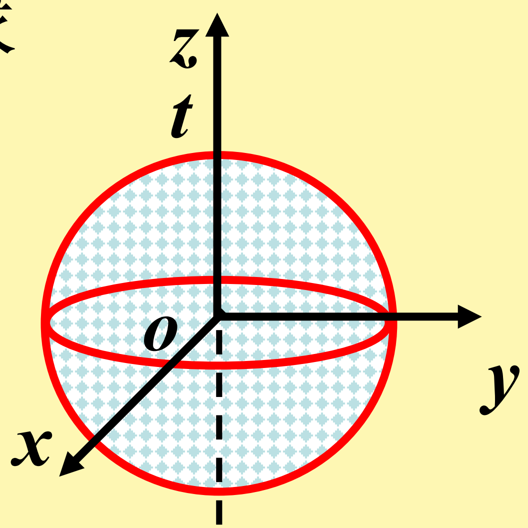
$$=\iiint_{\Omega_1}(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv+\iiint_{\Omega_2}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^1(1-r)r^2\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_1^{\frac{1}{\cos\varphi}}(r-1)r^2\sin\varphi dr$$

$$=\frac{\pi}{6}\int_0^{\pi/4}\sin\varphi d\varphi+2\pi\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{4\cos^4\varphi}-\frac{1}{3\cos^3\varphi}+\frac{1}{12}\right)d\varphi=\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$$

例5 设$f(t)$连续, $f(0)=0, f'(0)=1$,求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$$



解 $\because \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dv$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^t f(r)r^2\sin\varphi dr \;=4\pi\int_0^t r^2 f(r)dr$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\int_0^t r^2 f(r)dr}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{4t^2 f(t)}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)\;=1。$$